



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra 07-1

Control 1

P1. (2 ptos.) Determine los valores de verdad de las proposiciones p, q, r, s y t , si se sabe que la proposición

$$[(p \Leftrightarrow q) \wedge (\overline{r \Rightarrow s}) \wedge \overline{t}] \Rightarrow [s \vee (q \Rightarrow s)] \text{ es falsa.}$$

P2. (2 ptos.) Sean p, q, r, s proposiciones lógicas. Demuestre sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)].$$

P3. Sea p una proposición lógica y $q(x)$ una función proposicional.

- (a) (1 pto.) Si llamamos r a la proposición $(\forall x)(p \Rightarrow q(x))$, determine el valor de verdad de p , sabiendo que r es falsa. Justifique.
- (b) (1 pto.) Llamamos ahora s a la proposición $(\exists x)(p \Rightarrow q(x))$. Decida si es posible determinar el valor de verdad de p , sabiendo que s es verdadera. Justifique.

Parte Control 1 ALGEBRA

P1. Determine los valores de verdad de las proposiciones p, q, r, s y t si se sabe que la proposición

$$[(p \Leftrightarrow q) \wedge \overline{r \Rightarrow s} \wedge \overline{t}] \Rightarrow [s \vee (q \Rightarrow s)] \text{ es falsa}$$

Solución: Es inmediato que $[(p \Leftrightarrow q) \wedge \overline{r \Rightarrow s} \wedge \overline{t}]$ debe ser verdadera y $[s \vee (q \Rightarrow s)]$ falso.

De $[s \vee (q \Rightarrow s)]$ falso se concluye que ambos,

s y $q \Rightarrow s$ son falsos de donde q es verdadero y s falso.

De $[(p \Leftrightarrow q) \wedge \overline{r \Rightarrow s} \wedge \overline{t}]$ verdadero, necesariamente

$(p \Leftrightarrow q)$, $\overline{r \Rightarrow s}$ y \overline{t} deben ser verdaderos, por lo tanto

p es V por ser equivalente a q ; t es F pues \overline{t} es V

y finalmente $\overline{r \Rightarrow s}$ es V , entonces $r \Rightarrow s$ es F , de modo que

como s es F , se tendrá que r es V

Se concluye que: p, q, r son Verdaderos y s, t son Falsos

P2. Sean p, q, r, s proposiciones lógicas. Demuestre sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una Tautología

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$$

Primera Forma: Usando álgebra proposicional (tautologías)

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$$

$$\Leftrightarrow \sim [(\sim p \vee q) \wedge (\sim r \vee s)] \vee [(\sim p \wedge r) \vee (q \wedge s)] \quad \text{Definición de } \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim r \vee s)] \vee [(\sim p \wedge r) \vee (q \wedge s)] \quad \text{Ley de Morgan}$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (r \wedge \sim s)] \vee [(\sim p \vee \sim r) \vee (q \wedge s)] \quad \text{Leyes de Morgan}$$

$$\textcircled{1.0} \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee \sim p] \vee [(r \wedge \sim s) \vee \sim r] \vee (q \wedge s) \quad \text{Comutando y asociando.}$$

$$\Leftrightarrow [(\underbrace{p \wedge \sim q}_{\sim q \vee \sim p}) \vee (\underbrace{r \wedge \sim s}_{\sim s \vee \sim r})] \vee (q \wedge s) \quad \text{Distribuyendo.}$$

$$\Leftrightarrow (\sim q \vee \sim p) \vee (\sim s \vee \sim r) \vee (q \wedge s) \quad \text{Se usa } V \wedge \text{prop} \Leftrightarrow \text{prop}$$

$$\Leftrightarrow [\sim q \vee (q \wedge s)] \vee \sim p \vee \sim s \vee \sim r \quad \text{Asociando}$$

$$\Leftrightarrow [(\underbrace{\sim q \vee q}_{V}) \wedge (\underbrace{\sim q \vee s}_{\sim q \vee s})] \vee \sim p \vee \sim s \vee \sim r \Leftrightarrow \sim q \vee s \vee \sim p \vee \sim s \vee \sim r$$

$$\textcircled{1.0} \checkmark \Leftrightarrow (\sim q \vee \sim p \vee \sim s) \vee (\underbrace{s \vee \sim s}_{V}) \Leftrightarrow (\sim q \vee \sim p \vee \sim s) \vee V \Leftrightarrow V$$

OBS: Puede asociar de otras formas.

Segunda Forma: Por inspección.

Pero que $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$ sea tautología basta suponer que si $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)]$ es V deberá ocurrir que $[(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$ es V

En efecto, si $p \wedge r$ es V entonces p es V y r es V y por hipótesis de $p \Rightarrow q$ V se deduce q es V y de $r \Rightarrow s$ V se deduce s es V

Así, q y s son V , es decir $q \wedge s$ es V , por lo tanto $(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)$ es V .

P3.

i) Si llamamos r a la proposición $(\forall x)(p \Rightarrow q(x))$, determine el valor de verdad de p sabiendo que r es falso. Justifique.

Si r es falso, entonces $\sim r$ es verdadera, es decir $\sim[(\forall x)(p \Rightarrow q(x))]$ es V es decir $(\exists x)(\sim(p \Rightarrow q(x)))$ es V o bien $(\exists x)(p \wedge \sim q(x))$ es V

1.0 pts

Por lo tanto, esto obliga a que la proposición fija p sea V

ii) llamamos ahora s a la proposición $(\exists x)(p \Rightarrow q(x))$. Decida si es posible determinar el valor de verdad de p sabiendo que s es verdadera. Justifique.

$(\exists x)(p \Rightarrow q(x))$ puede escribirse como $(\exists x)(\sim p \vee q(x))$. Como sabemos que éste es verdadero, es suficiente que $q(x)$ lo sea (y lo es).

En consecuencia el valor de s como V es independiente del valor de p (por el conectivo \vee).

1.0 pts

En consecuencia no es posible determinar el valor de p .